Lanchester og Osipovs kvadratiske lov

Herr Mann

32V

01.11.2017

Kilder:

Litt om Lanchesters arbeid: http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a241534.pdf

Oversettelse av Osipovs artikkel: http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a225484.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/Lanchester%27s_laws

https://en.wikipedia.org/wiki/Frederick_W._Lanchester

Egen translitterasjon av russisk. Oversettelse av russiske titler løst basert på de engelske oversettelsene.

Innledning

Jeg vil presentere to herremenn og noe av deres bidrag til militærteori. Med noen enkle (men viktige) antakelser deduserte de seg fram til en sammenheng mellom styrkers størrelse og tapstall – og dermed også innsikt i hvordan det lønner seg å disponere styrkene sine. Hvorvidt dette har noe praktisk nytte i militæroperasjoner finnes det vel mange meninger om. I tillegg til å kort gjøre rede for det jeg her kaller den kvadratiske loven vil jeg komme med noen presiseringer om modellens gyldighet.

Frederick William Lanchester (1868-1946) var en engelsk ingeniør og multigeni som jobbet med blant annet biler og fly. I 1914, litt før krigens utbrudd, publiserte han sine idéer om styrkers numeriske størrelse og tapstall i journalen Engineering. Disse var det som for ettertiden er kjent som Lanchesters kvadratlov (for moderne strid) og Lanchesters lineære lov (for gammeldags strid). Selv om disse altså originalt var ment å beskrive luft-til-luft-kamper, har de i ettertid blitt mest kjent som idéer om krigføring mer generelt. I 1916 kom de i bokform i Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm. Jeg har ikke funnet informasjon om hva han ellers drev med mens krigen raste. Under første verdenskrig ser det ut til at hans militærteoretiske arbeid fikk lite oppmerksomhet. I den andre verdenskrig ble Lanchesters modell gitt noe anerkjennelse av U.S. Army Air Corps, uten at det fikk store praktiske konsekvenser.

M. Osipov er kun kjent gjennom fem artikler titulert Vlijanie Tsjislennosti Srazhajusjtsjikhasja Storon na Ikh Poteri (Sammenhengen mellom styrkers numeriske størrelse og deres tap) i den russiske tidsskriftet Voennyj Sbornik (Militærsamling) mellom juni og oktober 1915. Fra disse kommer det tydelig fram at han er kjent med samtidig doktrine, militærhistorie og for tiden avansert matematikk. I tillegg skriver han elegant og med et stort ordforråd. Muligens var han en akademiker som var innrullert som offiser. Mer enn dette vet vi ikke – ikke engang hans yrke eller fulle navn har blitt spart for tidens tann. Osipov kom fram til den samme kvadratiske loven som Lanchester Det er uvisst hvorvidt Osipov visste om Lanchesters arbeid om samme tema publisert året før. Uansett er det noen nyvinninger i Osipovs arbeid, blant annet i bruken av matematikk, modeller som tar høyde for heterogene styrker og moral, og kanskje aller mest interessant: En sammenlikning av de teoretiske resultatene med data fra tidligere slag og en revidering av den kvadratiske loven basert på dette. Mulig at jeg skriver om dette i et nytt innlegg. Hvis noen vil ha svaret umiddelbart anbefaler jeg å lese oversettelsen av Osipov - som sagt skrev han elegant og viste stor innsikt i mange felt.

Følgende måte å utlede loven dukker opp både hos Lanchester og Osipov. Min omskrivning likner nok mest på Osipovs tekst.

Innledning

Jeg vil presentere to herremenn og noe av deres bidrag til militærteori. Med noen enkle (men viktige) antakelser deduserte de seg fram til en sammenheng mellom styrkers størrelse og tapstall – og dermed også innsikt i hvordan det lønner seg å disponere styrkene sine. Hvorvidt dette har noe praktisk nytte i militæroperasjoner finnes det vel mange meninger om. I tillegg til å kort gjøre rede for det jeg her kaller den kvadratiske loven vil jeg komme med noen presiseringer om modellens gyldighet.

Frederick William Lanchester (1868-1946) var en engelsk ingeniør og multigeni som jobbet med blant annet biler og fly. I 1914, litt *før* krigens utbrudd, publiserte han sine idéer om styrkers numeriske størrelse og tapstall i journalen *Engineering*. Disse var det som for ettertiden er kjent som Lanchesters kvadratlov (for moderne strid) og Lanchesters lineære lov (for gammeldags strid). Selv om disse altså originalt var ment å beskrive luft-til-luft-kamper, har de i ettertid blitt mest kjent som idéer om krigføring mer generelt. I 1916 kom de i bokform i *Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm*. Jeg har ikke funnet informasjon om hva han ellers drev med mens krigen raste. Under første verdenskrig ser det ut til at hans militærteoretiske arbeid fikk lite oppmerksomhet. I den andre verdenskrig ble Lanchesters modell gitt noe anerkjennelse av U.S. Army Air Corps, uten at det fikk store praktiske konsekvenser.

M. Osipov er kun kjent gjennom fem artikler titulert *Vlijanie Tsjislennosti Srazhajusjtsjikhasja Storon na Ikh Poteri* (Sammenhengen mellom styrkers numeriske størrelse og deres tap) i den russiske tidsskriftet *Voennyj Sbornik* (Militærsamling) mellom juni og oktober 1915. Fra disse kommer det tydelig fram at han er kjent med samtidig doktrine, militærhistorie og for tiden avansert matematikk. I tillegg skriver han elegant og med et stort ordforråd. Muligens var han en akademiker som var innrullert som offiser. Mer enn dette vet vi ikke – ikke engang hans yrke eller fulle navn har blitt spart for tidens tann. Osipov kom fram til den samme kvadratiske loven som Lanchester Det er uvisst hvorvidt Osipov visste om Lanchesters arbeid om samme tema publisert året før. Uansett er det noen nyvinninger i Osipovs arbeid, blant annet i bruken av matematikk, modeller som tar høyde for heterogene styrker og moral, og kanskje aller mest interessant: En sammenlikning av de teoretiske resultatene med data fra tidligere slag og en revidering av den kvadratiske loven basert på dette.

Den kvadratiske loven

La $A(t)$ være antall soldater i styrke Anders og $B(t)$ være antall soldater i styrke Bendik, begge som funksjoner av tid. $A(0)$ og $B(0)$ er størrelsen på de to styrkene når slaget starter. Videre kommer jeg bare til å skrive A og B – underforstått er da disse funksjoner av tid.

Både Lanchester og Osipov baserte seg på følgende forutsetninger:

1. Alle soldatene har mulighet til å ramme fienden.
2. Hver styrke mister menn kontinuerlig.
3. For hver tidsenhet mister man et antall mann proporsjonalt med størrelsen på den fiendlige styrken.

Uttrykt med matematiske symboler blir dette to differensiallikninger:

- $A' = -bB$
- $B' = -aA$

For de som ikke har gjort kalkulus på ei stund er A' og B' de deriverte av A og B, altså hvor mye de endrer seg per tidsenhet. Minustegnet betyr da at etter hvert som tida går blir styrkene mindre. Koeffisientene b og a er et mål på kvaliteten til hver enkelt soldat. Hvis $b = 0{,}1$ betyr det at for hver tidsenhet så vil hver soldat i styrke Bendik gjennomsnittlig skyte 0,1 soldater i styrke Anders.

Med middels vanskelig matematikk skal vi nå forsøke å få noe spennende ut av disse likningene. Skriver de deriverte med Leibniznotasjon (bare en kosmetisk endring, men gjør det lettere å se hva som skjer etterpå):

$$A' = \frac{dA}{dt} = -bB$$

$$B' = \frac{dB}{dt} = -aA$$

Deler den første likninga på den andre:

$$\frac{\frac{dA}{dt}}{\frac{dB}{dt}} = \frac{-bB}{-aA}$$

Får ei separabel differensiallikning, ordner det som gjelder A på venstre side og det som gjelder B på høyre side:

$$\frac{dA}{dB} = \frac{bB}{aA}$$

$$aA * dB * \frac{dA}{dB} = \frac{bB}{aA} * aA * dB$$

$$aAdA = bBdB$$

Integrerer hver side av likninga:

$$\int aAdA = \int bBdB$$

$$a\int A dA = b\int B dB$$

$$\frac{aA^2}{2} + C_1 = \frac{bB^2}{2} + C_2$$

C_1 og C_2 er her konstantene vi får fra ubestemt integrasjon. Vi klarer ikke nå å tallfeste dem, men det som er viktig er at de er uavhengige av tida.

Ganger med to og flytter litt på leddene:

$$aA^2 - bB^2 = 2C_1 - 2C_2$$

Navngir en ny konstant, $C = 2C_1 - 2C_2$:

$$aA^2 - bB^2 = C$$

Hva betyr dette? Vi har sagt at A og B er funksjoner av tid, så de vil kunne variere med tida. Det vi nå har vist er at hvis vi kvadrerer tallene, ganger med hver sin koeffisient a og b, og så trekker et av disse leddene fra det andre får vi et uttrykk som *ikke* skal variere med tid. La A_0 og B_0 være størrelsen på styrke Anders og styrke Bendik når slaget starter og A_1 og B_1 være størrelsen på styrkene etter slagets slutt. At uttrykket ovenfor skal være konstant medfører da at

$$aA_0^2 - bB_0^2 = aA_1^2 - bB_1^2$$

Det er dette som er den kvadratiske loven framsatt av både Lanchester og Osipov. Osipov hadde en alternativ metode for å vise den, men siden matematikk er perfekt endte de opp med samme resultat.

La oss nå anta at styrke B utslettes, altså at $B_1 = 0$. Da får vi:

$$aA_0^2 - bB_0^2 = aA_1^2$$

$$aA_1^2 = aA_0^2 - bB_0^2$$

$$A_1^2 = A_0^2 - \frac{b}{a}B_0^2$$

$$A_1 = \sqrt{A_0^2 - \frac{b}{a}B_0^2}$$

Hvis vi vet størrelsen på de to styrkene og den relative kvaliteten på dem på enkeltmannsnivå forteller denne siste formelen hvor mange mann som er igjen i styrke Anders etter at de har utslettet styrke Bendik. Kult? Kult.

Vi må passe på at vi ikke tar kvadratrota av noe negativt. Imaginære tall kan vi tåle, men vi driver ikke med imaginære soldater! Eller er det det maskirovka handler om? Den siste formelen funker bare hvis $A_0^2 \geq \frac{b}{a}B_0^2$. Kan skrives om til $aA_0^2 \geq bB_0^2$.

Et spesialtilfelle: $A_0^2 = \frac{b}{a}B_0^2$. Formelen gir $A_1 = \sqrt{0} = 0$, altså begge styrkene utslettes. Hva om $bB_0^2 > aA_0^2$? Da kan vi snu om på $aA_0^2 - bB_0^2 = aA_1^2 - bB_1^2$ for å få

$$bB_1^2 = aA_0^2 - bB_0^2 - aA_1^2$$

$$B_1^2 = \frac{a}{b}A_0^2 - B_0^2 - \frac{a}{b}A_1^2$$

$$B_1 = \sqrt{\frac{a}{b}A_0^2 - B_0^2 - \frac{a}{b}A_1^2}$$

Denne rota er rell hvis $bB^2 > aA^2$ og $A_1 = 0$, altså at styrke A utslettes.

Foreløpig oppsummering: Hvis $aA^2 > bB^2$ er det styrke Anders som vinner, hvis $aA^2 = bB^2$ blir det uavgjort, og hvis $aA^2 < bB^2$ er det styrke Bendik som vinner. Altså kan vi tolke aA^2 og bB^2 som kampkraften til de to styrkene, der den som har høyest kampkraft naturligvis vinner slaget. Kampkraften øker lineært med kvaliteten til hver enkelt soldat, men kvadratisk med antall soldater!

La oss se på et konkret eksempel. Både Anders og Bendik har 2000 soldater. Soldatene er like flinke i enkeltmannsferdigheter, likt utrustet og forsynt og generelt av identisk kvalitet, så vi kan sette $\frac{a}{b} = 1$. For enkelthetens skyld har jeg her ikke gitt noen fordel til forsvareren. Bendik deler styrken sin i to styrker på 1000. Anders engasjerer disse suksesivt med hele sin styrke. I det første slaget er det da samtlige 2000 av Anders sine menn mot 1000 av Bendik sine menn, og de 1000 utslettes. Har de påført like mange tap som de tok?

$$A_1 = \sqrt{A_0^2 - \frac{b}{a}B_0^2}$$

$$A_1 = \sqrt{2000^2 - 1 * 1000^2} = \sqrt{4000000 - 1000000} = \sqrt{3000000} \approx 1732$$

Anders har igjen 1732 menn, så han har altså mistet kun 268 etter å ha utslettet 1000 av fienden. I neste fase er da $A_0 = 1732$ og $B_0 = 1000$.

$$A_1 = \sqrt{1732^2 - 1 * 1000^2} = \sqrt{2999824 - 1000000} = \sqrt{1999824} \approx 1414$$

Med likeverdige styrker har Anders mistet 586 mann, mens Bendik har mistet alle sine 2000. Altså er det lurt å kjempe med styrkene sine samlet – ikke bare for å få gjennombrudd på et ønsket punkt, men også fordi man tar færre tap enn om man kjemper spredt!

En annen konsekvens av den kvadratiske loven er at en styrke der soldatene er dobbelt så gode som motstanderen på enkeltmannsferdigheter fortsatt vil tape hvis motstanderen er dobbelt så tallrik. For å slå en dobbelt så stor styrke må man være fire ganger så god på enkeltmannsferdigheter.

Modellens gyldighet

Som enhver annen matematisk modell gjelder denne bare når veldig konkrete forutsetninger er tilnærmet oppfylt. Noen presiseringer og utdypinger, slik jeg skjønner sammenhengene her:

1. **Alle soldatene har mulighet til å ramme fienden.** Man kan altså ikke bare telle antall geværer som tilhører de to styrkene. Det er de som beskyter fienden som bidrar til kampkraften aA^2.
   En styrke som bruker lende og mobilitet til å engasjere mindre deler av en større styrke kan altså fortsatt vinne, helt i henhold til loven. Lende, mobilitet, samhandling og mye annet er parametre som er vanskelig å ta med i koeffisientene a og b. Der er dermed en villedende forenkling om noen sier at koeffisientene angir styrkenes kvalitet som samlet enhet. Selv om jeg vet det ikke blir helt dekkende kaller jeg noen steder koeffisientene a og b soldatenes enkeltmannsferdigheter.
   Lanchester laget to lover, der forskjellen lå i denne forutsetningen. Den andre loven er ment å blant annet beskrive tida skytevåpen dominerer, og forutsetter at hver mann bare kan ramme en fiende som står rett foran seg. Da blir resultatet at kampkraft øker *lineært* med antall soldater.
2. **Hver styrke mister menn kontinuerlig.** Store, plutselige tap passer ikke med denne modellen. Det finnes en diskret modell som heller kan brukes til slikt. Jeg har ikke sett nøye på den selv, men leser at den blant annet kan simulere båter som pælmer missiler på hverandre.
   Også med geværmenn er det i prinsippet diskrete tap, men om vi har et dugelig antall soldater og lar hver kule ha en ganske liten sjanse for å påføre tap kan vi tilnærme dette til kontinuerlige funksjoner. Jeg har laget en Excel-simulering som gjerne sendes til spesielt interesserte.
3. **For hver tidsenhet mister man et antall mann proporsjonalt med størrelsen på den fiendlige styrken.** Hvis det er noen matematikere som leser dette vil dere kanskje stusse litt på formuleringen. Foreslå gjerne forbedringer.
   Ellers vil jeg påpeke at i denne forutsetningen ligger det at alle mann i en styrke skyter like effektivt – altså bruker like lang tid på å påføre et tap. Det er dermed ikke nødvendigvis effektivt å be 45. bataljon i naboteigen skyte blåplast i fiendens generelle retning fordi man vil øke antallet soldater som inngår i kampkraften aA^2.
   For å forenkle er det her ikke tatt med forsterkninger og retrett. Osipov skrev litt om dette. En annen ting som mangler er en modellering av logistikk – slik differensiallikningene er satt opp er det ingen av partene som går tom for ammunisjon.

Selv for en som forstår modellen fullt ut og alltid har med seg feltkalkulatoren mener jeg ikke at den kvadratiske loven skal gi nøyaktige resultater eller alltid være styrende. Men jeg håper at disse presiseringene gjør det tydeligere hvordan modellen faktisk fungerer.